

mentare Theorie der Viskosität dar. Die ihr zugrunde liegenden Vorstellungen dürften wohl hinreichend als zutreffend erwiesen worden sein. Zusammenfassend können wir also sagen, daß das viskose Fließen amorpher Körper im zähen und flüssigen Zustand wie das kristalline Gleiten durch thermisch ausgelöste scherungsartige Atomverschiebungen zustande kommt. Die Aktivierungsenergie ist durch die Schubelastizität be-

stimmt, die gegenüber diesen kurzzeitigen Vorgängen auch im viskosen Zustand vorhanden ist. Die quantitativen Unterschiede zwischen dem viskosen Fließen und dem kristallinen Gleiten sind durch die verschiedenen Strukturverhältnisse in beiden Fällen bedingt.

Hrn. Prof. Dr. U. Dehlinger und Hrn. Prof. Dr. E. Fues danke ich bestens für wertvolle Diskussionen.

## Mediumrückwirkung und akustische Strahlungsdämpfung für ein kreisförmiges Plättchen

Von HANS BRAUMANN †

(Z. Naturforschg. 3a, 340—350 [1948]; eingegangen am 5. September 1947\*)

Zur Berechnung des Schallfeldes eines kreisförmigen Plättchens, welches kleine harmonische Schwingungen in Richtung seiner Achse ausführt, wird zunächst die akustische Wellengleichung in Bipolarkoordinaten umgeschrieben. Falls das akustische Medium als inkompressibel angesehen werden kann, führt die Wellengleichung auf die Potentialgleichung, welche exakt gelöst wird. Es ergibt sich, daß das Medium so auf das Plättchen zurückwirkt, als wäre dessen Masse um  $8R^3\rho_0/3$  erhöht ( $R$  Plättchenradius,  $\rho_0$  Dichte des Mediums). Bei kompressiblem Medium kommt zu dieser konservativen Rückwirkung noch die Strahlungsdämpfung hinzu. Für das Zeitmittel der abgestrahlten Leistung ergibt sich angenähert  $8R^6\rho_0\omega^4V^2/27\pi c^3$  ( $\omega$  Kreisfrequenz,  $V$  Geschwindigkeitsamplitude des Plättchens,  $c$  Schallgeschwindigkeit).

Ein dünnes, starres, kreisförmiges, ebenes Plättchen (Abb. 1) vom Radius  $R$ , dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung und dessen Ebene mit der  $YZ$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfällt, führe im akustischen Sinne kleine harmonische Schwingungen in der  $X$ -Richtung aus. Sei  $V$  die Geschwindigkeitsamplitude des Plättchens, so gilt dann für dessen

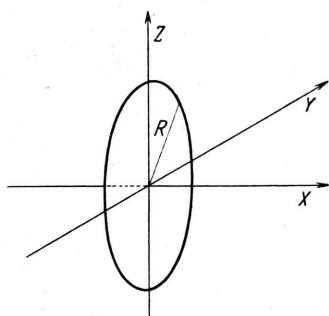


Abb. 1. Lage des schwingenden Plättchens im rechtwinkligen Koordinatensystem.

tensystems zusammenfällt, führe im akustischen Sinne kleine harmonische Schwingungen in der  $X$ -Richtung aus. Sei  $V$  die Geschwindigkeitsamplitude des Plättchens, so gilt dann für dessen

\* Der Redaktion zugegangen von Dr. W. Schüle, Stuttgart-Degerloch, Oberer Wald 3.

$x$ -Koordinate  $\xi$  (Elongation des Plättchens) in der üblichen komplexen Schreibweise

$$\xi = V e^{i\omega t},$$

wo  $\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingungen bedeutet.

Der ganze Raum sei mit einem homogenen akustischen Medium der mittleren Dichte  $\rho_0$  und der Schallfortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  erfüllt. Wir stellen uns die Aufgabe, die Kräfte zu berechnen, mit welchen das mit der Kreisfrequenz  $\omega$  periodische Schallfeld auf das Plättchen zurückwirkt.

Das Geschwindigkeitspotential des Schallfeldes setzen wir wie üblich in der Form

$$\Phi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \quad (1)$$

an.  $\Phi$  genügt bekanntlich<sup>1</sup> der Wellengleichung

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \text{ woraus für } \psi \text{ das Bestehen der Schwingungsgleichung}$$

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad k = \omega/c \quad (2)$$

folgt.

<sup>1</sup> S. z. B. O. Heymann, Akust. Z. 2, 193 [1937].

Mit dem Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  hängen die anderen Größen des Schallfeldes bekanntlich<sup>1</sup> folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} \text{Teilchengeschwindigkeit } v &= \text{grad } \Phi; \\ \text{Schalldruck } p &= -\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Aufgabe ist im wesentlichen gelöst, sobald es gelingt, eine der Gl. (2) genügende Wellenfunktion  $\psi$  so zu bestimmen, daß sie folgenden Randbedingungen genügt:

1.  $\psi$  muß sich im Unendlichen verhalten wie

$$e^{-ik\varrho/\varrho},$$

2.  $\psi$  muß axialsymmetrisch um die  $x$ -Achse sein, eine selbstverständliche Folge der axialsymmetrischen Natur des Problems. Führt man dementsprechend Zylinderkoordinaten  $(x, r, \varphi)$  um die  $x$ -Achse ein, so bedeutet das  $\psi_{\varphi} = 0$  und  $\psi = \psi(x, r)$ .

3. Auf der Platte muß gelten

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=0, r < R} = V. \quad (4)$$

4. Grad  $\psi$  muß einen zur Plattenebene symmetrischen Verlauf haben, eine ebenso selbstverständliche Folge aus der Problemstellung. Daraus und aus dem Verschwinden von  $\psi$  im Unendlichen folgt, daß  $\psi$  eine ungerade Funktion von  $x$  sein muß:

$$\psi(x, r) = -\psi(-x, r). \quad (5)$$

Aus der Forderung der Stetigkeit von  $\psi$  im Innern des Mediums ergibt sich speziell für  $x = 0, r > R$

$$\psi(0, r) = 0; \quad r > R. \quad (6)$$

Auf der Platte selbst ( $x = 0, r < R$ ) jedoch muß gelten

$$\psi(-0, r) = -\psi(+0, r); \quad r < R. \quad (7)$$

— (+)0 bedeutet dabei, daß der Grenzwert von  $\psi$  gemeint ist, welcher sich bei stetiger Annäherung von negativen (positiven)  $x$ -Werten her an den betreffenden Plattenpunkt ergibt. Physikalisch bedeutet (7), daß die Druckabweichungen gegenüber dem mittleren Druck auf den beiden Seiten der Platte in jedem Zeitpunkt entgegengesetzt gleich sind.

Die Symmetrieeigenschaften des gesuchten  $\psi$  gestatten es, daß wir uns nur um den Koordinatenbereich  $x \geq 0$  kümmern.

In den Zylinderkoordinaten  $x, r$  geschrieben, lautet die Schwingungsgleichung (2) für unseren axialsymmetrischen Fall bekanntlich

$$\psi_{xx} + \psi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_r + k^2 \psi = 0. \quad (8)$$

Zunächst führen wir dimensionslose Koordinaten  $x', r'$  ein durch  $x' = x/2R, r' = r/2R$ . Damit schreibt sich (8)

$$\psi_{x'x'} + \psi_{r'r'} + \frac{1}{r'} \psi_{r'} + k'^2 \psi = 0, \quad k' = 2Rk. \quad (9)$$

Aus der Randbedingung (4) wird

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right)_{x' \rightarrow +0, r' < \frac{1}{2}} = 2RV. \quad (10)$$

Die Randbedingung (6) wird zu

$$\psi(0, r') = 0, \quad r' > \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Schließlich muß  $\psi$  das unter 1. geforderte Verhalten zeigen, wenn eine der beiden Variablen  $\infty$  wird.

Zur Lösung des Randwertproblems werden wir an Stelle der Zylinderkoordinaten  $x', r'$  sogenannte Bipolarkoordinaten  $\sigma, \tau$  einführen mit den Polen  $(0, -1/2)$  und  $(0, +1/2)$  in der  $(x', r')$ -Ebene. Als Pole werden somit die beiden Endpunkte  $P_1$  und  $P_2$  eines Plattendurchmessers gewählt. Die geometrische Bedeutung der Koordinaten ergibt sich aus

$$\sigma = \varrho_2 + \varrho_1, \quad \tau = \varrho_2 - \varrho_1,$$

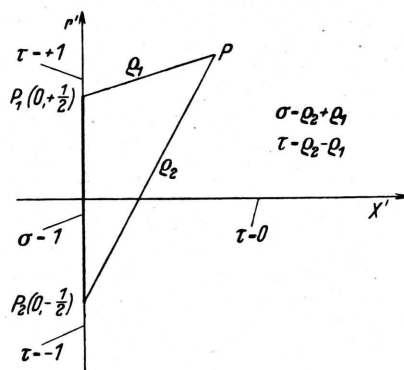


Abb. 2. Bipolarkoordinaten.

in Verbindung mit der Abb. 2.  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sind die (dimensionslos gemessenen) Abstände des Auf-

punktes  $P$  von  $P_1$  und  $P_2$ . Die Kurven  $\sigma = \text{const.}$  sind die konfokalen Ellipsen mit den Brennpunkten  $P_1$  und  $P_2$ , die Kurven  $\tau = \text{const.}$  die darauf senkrechten konfokalen Hyperbeln mit denselben Brennpunkten. Die Plattenpunkte zwischen  $P_1$  und  $P_2$  werden erfaßt durch den Grenzfall  $\sigma = 1$ . Die Verlängerungen von  $P_1 P_2$  nach außen entsprechen  $\tau = \pm 1$ . Auf der  $x'$ -Achse ist  $\tau = 0$ . Den unendlich fernen Punkten ist  $\sigma = \infty$  zugeordnet. Die ganze rechte Halbebene  $x' \geq 0$  ist durch die Koordinatenbereiche

$$1 \leq \sigma \leq \infty, \quad -1 \leq \tau \leq +1$$

erreichbar.

Diese Koordinaten haben besonders den Vorzug, daß die interessierenden Ränder des  $(x', r')$ -Bereiches dargestellt werden durch die Randwerte der Koordinatenintervalle allein ( $\sigma = 1$ ;  $\tau = \pm 1$ ,  $\sigma = \infty$ ).

Durch eine einfache Rechnung ergeben sich als Zusammenhang zwischen  $(x', r')$  und  $(\sigma, \tau)$  die beiden Gleichungen

$$x'^2 = \frac{1}{4} (\sigma^2 - 1) (1 - \tau^2); \quad (12)$$

$$r' = \frac{1}{2} \sigma \tau. \quad (13)$$

Die direkte Transformation von (9) führt auf etwas weitläufige Rechnungen. Diese werden weitgehend vermieden durch Zuhilfenahme des der Differentialgleichung (9) zugeordneten Variationsproblems<sup>2</sup>. Die selbstadjungierte Form von (9) lautet

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[ r' \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right] + \frac{\partial}{\partial r'} \left[ r' \frac{\partial \psi}{\partial r'} \right] + k'^2 \psi = 0.$$

Sie läßt sich auffassen als Euler-Lagrange'sche Gleichung des folgenden Variationsproblems

$$S \int_0^\infty r' dr' \int_0^\infty dx' (\psi_x^2 + \psi_r^2 - k'^2 \psi^2) = 0. \quad (14)$$

Durch Differentiationen von (12) und (13) und Auflösen der sich ergebenden linearen Gleichungen für  $\partial\sigma/\partial x'$ ,  $\partial\sigma/\partial r'$ ,  $\partial\tau/\partial x'$ ,  $\partial\tau/\partial r'$  erhält man

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x'} = \frac{4x'\sigma}{\sigma^2 - \tau^2}; \quad \frac{\partial\tau}{\partial x'} = -\frac{4x'\tau}{\sigma^2 - \tau^2};$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r'} = \frac{2\tau(\sigma^2 - 1)}{\sigma^2 - \tau^2}; \quad \frac{\partial\tau}{\partial r'} = \frac{2\sigma(1 - \tau^2)}{\sigma^2 - \tau^2}.$$

Daraus bekommen wir unter Verwendung von (12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x'} &= \frac{4x'\sigma}{\sigma^2 - \tau^2} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} - \frac{4x'\tau}{\sigma^2 - \tau^2} \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \\ &= \frac{2V(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}{\sigma^2 - \tau^2} [\sigma\psi_\sigma - \tau\psi_\tau]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r'} = \frac{2}{\sigma^2 - \tau^2} [\tau(\sigma^2 - 1)\psi_\sigma + \sigma(1 - \tau^2)\psi_\tau]. \quad (16)$$

Gemäß (15) schreibt sich die Randbedingung (10) in den unabhängigen Variablen  $\sigma, \tau$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{V(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}{\sigma^2 - \tau^2} [\sigma\psi_\sigma - \tau\psi_\tau] = R V,$$

was für alle  $\tau^2 < 1$  auf das Erfülltsein von

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{1 - \tau^2}} \psi_\sigma = R V \quad (17)$$

hinauskommt.

Zur Transformation von (14) ist noch die Funktionaldeterminante  $\frac{\partial(x', r')}{\partial(\sigma, \tau)}$  zu berechnen.

Durch partielle Differentiationen von (12) und (13) nach  $\sigma$  und  $\tau$  errechnet sich

$$\frac{\partial(x', r')}{\partial(\sigma, \tau)} = \frac{\sigma^2 - \tau^2}{8x'}. \quad (18)$$

Mit (15), (16) und (18) wird aus (14) nach bedeutender Vereinfachung

$$S \iint \left\{ (\sigma^2 - 1)\psi_\sigma^2 + (1 - \tau^2)\psi_\tau^2 - \frac{k'^2}{4} (\sigma^2 - \tau^2)\psi^2 \right\} \cdot \frac{\sigma\tau}{x'} d\sigma d\tau = 0.$$

Wird der Integrand als  $F(\sigma, \tau, \psi_\sigma, \psi_\tau, \psi)$  bezeichnet, so lautet die Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung des Variationsproblems bekanntlich<sup>3</sup>

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} \left( \frac{\partial F}{\partial\psi_\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial\psi_\tau} \right) - \frac{\partial F}{\partial\psi} = 0.$$

Nach Durchführung der geforderten Differentiationen und Substitution von  $x'$  gemäß (12) lau-

<sup>2</sup> S. z. B. Frank - v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. I, Kap. XVIII, § 1, 4 von H. Rademacher.

<sup>3</sup> Frank - v. Mises<sup>2</sup>, Kap. XX, § 1, 2d von R. Courant.

tet diese Gleichung, wenn man sie noch mit  $2\sigma\tau/x'$  dividiert, schließlich

$$(\sigma^2 - 1)\psi_{\sigma\sigma} + (1 - \tau^2)\psi_{\tau\tau} + \left(2\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)\psi_{\sigma} + \left(\frac{1}{\tau} - 2\tau\right)\psi_{\tau} + \kappa^2(\sigma^2 - \tau^2)\psi = 0, \quad (19)$$

mit  $\kappa^2 = k'^2/4$ .

Die Randbedingung (11) für  $\psi(\sigma, \tau)$  schreibt sich jetzt

$$\psi(\sigma, \pm 1) = 0. \quad (20)$$

Für sehr große Entfernungen  $q$  von der Platte ist zufolge (12) und (13)

$$q'^2 \approx \frac{1}{4}\sigma^2; \quad q' \approx \frac{\sigma}{2}.$$

Dem zu fordernden Verhalten  $e^{-ikq/q'}$  für große  $q$  (Wellenfortpflanzungsrichtung nur nach außen) entspricht in unseren dimensionalen Entfernungen ein Verhalten  $e^{-ik'q'/q'}$ , und in unserer Variablen  $\sigma$  demnach

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \psi(\sigma, \tau) \approx \frac{[\tau^2]}{\sigma} e^{-i\kappa\sigma},$$

worin  $[\tau^2]$  die Rolle des Richtfaktors<sup>4</sup> spielt.

Wir versuchen das Problem nach der Methode der Separation der Variablen zu behandeln, indem wir ansetzen:

$$\psi(\sigma, \tau) = S(\sigma) T(\tau). \quad (21)$$

Damit liefert (19) nach Division durch  $ST$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \left[ (\sigma^2 - 1) S'' + \left( 2\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) S' \right] + \kappa^2 \sigma^2 \\ &= -\frac{1}{T} \left[ (1 - \tau^2) T'' + \left( \frac{1}{\tau} - 2\tau \right) T' \right] + \kappa^2 \tau^2 = \lambda, \end{aligned}$$

wo  $\lambda$  die noch zu bestimmende Separationskonstante bezeichnet.

Für den Fall der Zulässigkeit des Produktansatzes (21) müssen  $S(\sigma)$  und  $T(\tau)$  die folgenden gewöhnlichen linearen und homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung befriedigen:

$$(\sigma^2 - 1) S'' + \left( 2\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) S' + (\kappa^2 \sigma^2 - \lambda) S = 0; \quad (22a)$$

$$1 \leq \sigma < \infty;$$

$$(1 - \tau^2) T'' + \left( \frac{1}{\tau} - 2\tau \right) T' + (\lambda - \kappa^2 \tau^2) T = 0; \quad (22b)$$

$$-1 \leq \tau \leq +1.$$

Unsere Randbedingung (17) fordert

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{T(\tau)}{\sqrt{(1 - \tau^2)}} \sqrt{(\sigma^2 - 1)} S'(\sigma) = R V. \quad (23)$$

Die Randbedingung (20) verlangt

$$T(\pm 1) = 0. \quad (23a)$$

Eine notwendige Voraussetzung dafür, daß der Ansatz (21) eine Lösung unserer Aufgabe ermöglicht, ist demnach, daß ein  $\lambda$  derart bestimmt werden kann, daß  $T(\tau) = \sqrt{1 - \tau^2}$  die Differentialgleichung (22b) erfüllt. Man verifiziert leicht, daß  $T(\tau) = \sqrt{1 - \tau^2}$  (22b) genügt für  $\lambda = 2$  und  $\kappa = 0$ . Eine exakte Lösung unseres Problems kann demnach durch den Produktansatz (21) nur möglich sein bei inkompressiblem Medium mit unendlich großer Schallgeschwindigkeit.

Praktisch wird die Lösung für  $\kappa = 0$  zur Berechnung des Schallfeldes in der Nähe des schwingenden Plättchens bestimmt genügen. Dies entspricht der Übung, wonach man in der Nähe der Schallquelle näherungsweise so rechnen kann, als wäre das Medium inkompressibel. Weiter unten wird bei der Betrachtung des kompressiblen Falles die Berechtigung dazu einleuchten.

Der Fall  $\kappa = 0$  ist erledigt, wenn es gelingt, für  $\lambda = 2$  eine Lösung von (22a) zu finden, welche zufolge (23) die Randbedingung

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \sqrt{\sigma^2 - 1} S'(\sigma) = R V \quad (24)$$

erfüllt und für  $\sigma \rightarrow \infty$  verschwindet.

Da  $T = \sqrt{1 - \tau^2}$  eine exakte Lösung von (22b) für  $\lambda = 2$  darstellt und (22a) formal identisch ist mit (22b), so wird natürlich  $\sqrt{\sigma^2 - 1}$  ( $= i\sqrt{1 - \sigma^2}$ ) die Gl. (22a) für  $\lambda = 2$  (und  $\kappa = 0$ ) befriedigen.  $S(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - 1}$  ist nicht unsere gesuchte Lösung, weil sie mit wachsendem  $\sigma$  gegen  $\infty$  strebt. Wir können aus  $\sqrt{\sigma^2 - 1}$  jedoch nach der Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung durch Quadraturen finden<sup>5</sup>.

Wir gehen also mit dem Ansatz

$$S(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - 1} U(\sigma)$$

in (22a) und bekommen

$$(\sigma^2 - 1)^{\frac{3}{2}} U'' + \frac{4\sigma^2 - 1}{\sigma} \sqrt{\sigma^2 - 1} U' = 0.$$

<sup>4</sup> H. Stenzel, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen, Berlin 1939.

<sup>5</sup> Frank-v. Mises<sup>2</sup>, Kap. VI, § 2, 4 von L. Bieberbach.



Die allgemeine Lösung dieser separierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung für  $U'$  lautet

$$U' = \frac{c_1}{\sigma(\sigma^2 - 1)\sqrt{\sigma^2 - 1}},$$

mit  $c_1$  als erster Integrationskonstanten.

Hieraus bekommt man durch elementare Quadratur

$$U = c_1 \left[ -\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} - \arctg \sqrt{\sigma^2 - 1} \right] + c_2.$$

Man zeigt unschwer, daß  $S$  im Unendlichen wie  $1/\sigma^2$  verschwindet.

$c_1$  läßt sich nun tatsächlich auch noch so bestimmen, daß (24) erfüllt ist. (24) ergibt für  $c_1$  die Gleichung

$$-c_1 \lim_{\sigma \rightarrow 1} \left[ \sigma \left( \arctg \sqrt{\sigma^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma} \right] = R V,$$

also

$$c_1 = 2 R V / \pi.$$

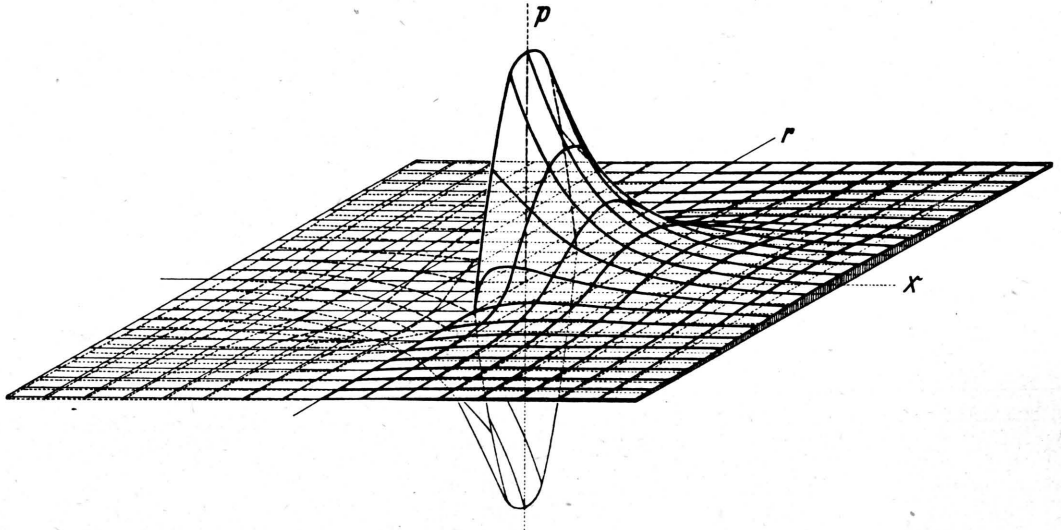


Abb. 3. Schalldruck  $p$  in Abhängigkeit von  $x$  und  $r$  nach Gl. (25).

Demnach haben wir die Integrationskonstanten  $c_1$  und  $c_2$  so zu bestimmen, daß

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\sigma^2 - 1} U \\ &= -c_1 - \sqrt{\sigma^2 - 1} [c_1 \arctg \sqrt{\sigma^2 - 1} - c_2] \end{aligned}$$

zunächst für  $\sigma \rightarrow \infty$  verschwindet und ferner (24) erfüllt wird.

Notwendig zur Erfüllung der ersten Forderung ist offensichtlich

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} [c_1 \arctg \sqrt{\sigma^2 - 1} - c_2] = 0,$$

also

$$c_2 = \frac{\pi}{2} c_1.$$

Diese Beziehung verleiht  $S$  die Gestalt

$$S = -c_1 \left[ 1 + \sqrt{\sigma^2 - 1} \left( \arctg \sqrt{\sigma^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Wir erhalten also im Falle eines inkompressiblen Mediums als Geschwindigkeitspotential zusammenfassend

$$\begin{aligned} \Phi &= \psi e^{i\omega t} = S(\sigma) T(\tau) e^{i\omega t} \\ &= -\frac{2 R V}{\pi} \sqrt{1 - \tau^2} \\ &\quad \cdot \left[ 1 - \sqrt{\sigma^2 - 1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\sigma^2 - 1} \right) \right] e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (25)$$

In Abb. 3 ist in parallelperspektivischer Darstellung der Verlauf von  $-\psi$  über der  $(x, r)$ -Ebene dargestellt; die Abb. gibt einen Überblick über die räumliche Druckverteilung eines Zeitpunktes.

Es soll jetzt die Kraft berechnet werden, welche in jedem Augenblick vom Medium auf die Kreisscheibe wirkt. Auf der rechten Seite ist der Druck nach (25) und (3)

$$p_{+0} = +i q_0 \omega \frac{2RV}{\pi} \sqrt{1-\tau^2} e^{i\omega t},$$

auf der linken, weil  $\psi$  ungerade in  $x'$  ist,

$$p_{-0} = -p_{+0}.$$

Bezeichnen wir mit  $r$  den Abstand eines Scheibpunktes vom Mittelpunkt, so gilt

$$\tau = \frac{1}{2R} [(R+r) - (R-r)] = \frac{r}{R}.$$

Integration der Drucke von links und rechts ergibt damit als wirksame resultierende Kraft in der positiven  $x$ -Richtung

$$\begin{aligned} P &= -2i q_0 \omega \frac{2RV}{\pi} \left( \int_0^R 2r\pi \sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} dr \right) e^{i\omega t} \\ &= -\frac{8R^3 q_0 \omega V}{3} i e^{i\omega t} \\ &= +\frac{8R^3 q_0 \omega V}{3} e^{i(\omega t - \pi/2)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Die Mediumkraft eilt somit der Geschwindigkeit um  $90^\circ$  nach, ist proportional dem Kubus des Plattendurchmessers, der Mediumdichte, der Frequenz und natürlich der aufgedruckten Geschwindigkeitsamplitude. Die Phasennacheilung der Mediumrückwirkung um  $90^\circ$  bringt es mit sich, daß das Zeitmittel der vom Medium aufgenommenen Energie im eingeschwungenen Zustand verschwindet. *Das inkompressible Medium wirkt zufolge (26) einfach so, als wäre die Masse der Platte um den Betrag  $8R^3 q_0/3$  erhöht.*

Für die Lösung gewisser Probleme war es von großem Interesse, nicht nur Aufschluß über die „mitschwingende Mediummasse“, sondern auch über den Betrag der abgestrahlten Energie zu gewinnen. Somit wollen wir uns jetzt der Lösung für den Fall des kompressiblen Mediums zuwenden.

Betrachten wir zunächst die Differentialgleichung (22a) für  $x \neq 0$  näher. (22a) hat singuläre Stellen für  $\sigma = \pm 1$ ,  $\sigma = 0$  und  $\sigma = \infty$ . Die Anwendung des Fuchsschen Theorems<sup>6</sup> ergibt, daß  $\sigma = \infty$  eine Unbestimmtheitsstelle ist, während für die drei anderen  $\sigma$ -Werte Stellen der Be-

stimmtheit vorliegen. Bildet man die Normalreihen<sup>7</sup> für  $\sigma = \infty$ , so zeigen die Lösungen von (22a) für jedes endliche  $\lambda$  folgendes asymptotische Verhalten:

$$\begin{aligned} S \rightarrow \text{const} \frac{e^{\mp i\lambda\sigma}}{\sigma} &\left[ 1 \pm \frac{\lambda - \kappa^2}{2i\kappa} \frac{1}{\sigma} \right. \\ &\left. + \frac{-(\lambda - \kappa^2)(\lambda - \kappa^2 - 2) + 2\kappa^2}{8\kappa^2\sigma^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Die Normalreihe mit dem oberen Zeichen weist das für unsere Lösungen geforderte Verhalten divergenter Wellen auf. Wir schließen daraus, daß es zu jedem  $\lambda$  eine Lösung der verlangten Art geben wird.

Die Substitution

$$S(\sigma) = e^{-i\lambda\sigma} P(\sigma) \quad (28)$$

in (22a) liefert für  $P(\sigma)$  die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \sigma(\sigma^2 - 1)P'' + (-1 + 2i\lambda\sigma + 2\sigma^2 - 2i\lambda\sigma^3)P' \\ + (i\lambda + (\kappa^2 - \lambda)\sigma - 2i\lambda\sigma^2)P = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Würden wir in der Umgebung  $\sigma = 1$  die Lösungen eines Fundamentalsystems mit den sich hier ergebenden charakteristischen Exponenten  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1/2$  in der üblichen Form<sup>6</sup>

$$P = (\sigma - 1)^{\frac{k_1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (\sigma - 1)^{\nu}$$

ansetzen, so würde der Konvergenzradius wegen der singulären Stelle von (29) bei  $\sigma = 0$  nur bis  $\sigma = 2$  reichen. Durch die Transformation

$$z = 1 - \frac{1}{\sigma}; \quad \sigma = \frac{1}{1-z} \quad (30)$$

schaffen wir diese störende Singularität ins Unendliche und erreichen gleichzeitig, daß die  $\sigma = -1$  entsprechende neue singuläre Stelle  $z = 2$  die Konvergenz in dem gesamten uns nun interessierenden Intervall  $0 \leq z < 1$  auch jetzt nicht zu behindern vermag. Die Transformation von (29) mit (30) bringt

$$\begin{aligned} z(1-z)^3(2-z) \frac{d^2P}{dz^2} \\ + [(1-z)^4 + 2i\lambda(1-z)^3 - 2i\lambda(1-z)] \frac{dP}{dz} \\ + [i\lambda(1-z)^2 + (\kappa^2 - \lambda)(1-z) - 2i\lambda] P = 0; \end{aligned} \quad 0 \leq z < 1. \quad (31)$$

<sup>6</sup> S. z. B. H. Schmidt, Theorie der Wellengleichung. Leipzig 1931. Vgl. § 26.

<sup>7</sup> Frank-v. Mises<sup>2</sup>, Kap. VI, § 4, 6 und 7 von L. Bieberbach.

Für die Umgebung  $z = 0$  ( $\sigma = 1$ ) liefert diese Differentialgleichung die folgenden charakteristischen Ansätze für ein Fundamentalsystem:

$$P = \sqrt{z} \sum_0^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \quad \text{und} \quad P = \sum_0^{\infty} b_{\nu} z^{\nu}.$$

Unsere gesuchte Lösung muß also enthalten sein in dem Ansatz

$$P(z) = \sqrt{z} P_1(z) + P_2(z), \quad (32)$$

wo  $P_1(z) = \sum_0^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  und  $P_2(z) = \sum_0^{\infty} b_{\nu} z^{\nu}$  Potenzreihen mit von 0 verschiedenen Absolutgliedern bedeuten, für deren Koeffizienten sich aus (31) Rekursionsformeln gewinnen lassen. Wir verzichten auf ihre Aufstellung, weil wir sie für die Berechnung der Rückwirkung und Strahlung nicht brauchen werden.

Das für die Randbedingung (23) wesentliche Produkt  $S'(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - 1}$  schreibt sich in  $P$  und  $z$  wegen (28) und (30) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} S'(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - 1} &= \sqrt{z(2-z)}(1-z) \frac{d}{dz} \left[ e^{i\pi/(1-z)} P(z) \right] \\ &= \sqrt{z(2-z)}(1-z) \\ &\quad \cdot \left[ P'(z) - \frac{i\pi}{(1-z)^2} P(z) \right] e^{-i\pi/(1-z)}. \end{aligned}$$

Wegen (32) gilt

$$P'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} P_1(z) + \sqrt{z} P_1'(z) + P_2'(z).$$

Damit erhalten wir für  $\sigma \rightarrow 1$  ( $z \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 1} S'(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - 1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2z} \left[ \frac{1}{2\sqrt{z}} P_1(0) + \sqrt{z} P_1'(0) \right. \\ &\quad \left. + P_2'(0) - i\pi P(0) \right] e^{-i\pi} \\ &= \frac{P_1(0)}{\sqrt{2}} e^{-i\pi} = \frac{a_0}{\sqrt{2}} e^{-i\pi}. \end{aligned} \quad (33)$$

$b_0$  bleibt somit durch (23) unbestimmt.

Nunmehr wenden wir uns zur Untersuchung der Gl. (22b) für  $T$ . Hier müssen wir von vornherein auf die Randbedingungen (23) und (23a) achten. (23) verlangt

$$T(\tau) = \sqrt{1 - \tau^2},$$

womit von selbst schon (23a) erfüllt wäre. Dies ist aber für  $x \neq 0$  durch den Ansatz (21) nicht exakt zu erreichen. Unser Weg wird daher folgender sein: Wir ersetzen die Randbedingung  $T = \sqrt{1 - \tau^2}$  durch eine möglichst benachbarte, bestimmen also eine Separationskonstante  $\lambda$  so, daß es eine Näherungslösung von (22b) gibt, welche im Intervall  $0 \leq \tau^2 \leq 1$  „möglichst“ mit  $\sqrt{1 - \tau^2}$  übereinstimmt.

Es wird sich zeigen, daß dies, wenigstens für so kleine Werte von  $x$ , wie sie praktisch nur in Frage kommen, gut gelingt. Zu dieser Näherungslösung werden wir dann ein  $S$  so aufweisen, daß die Randbedingung (10) erfüllt ist und das Verhalten von  $\psi$  im Unendlichen stimmt.

Weitere Näherungen ließen sich auf genau analogem Wege durch den Ansatz  $\psi = \sum_1^n S_i(z, \lambda_i) T_i(\tau, \lambda_i)$  gewinnen. Da der Fall  $n = 1$  für „kleine“ Plattendurchmesser praktisch ausreichend genaue Ergebnisse bringt, soll vorläufig auf die Durchführung für  $n > 1$  verzichtet werden.

Die Fundamentalgleichung\* von (22b) für die Stellen der Bestimmtheit  $\tau = \pm 1$  liefert als charakteristische Exponenten 0 und  $1/2$ . Ersterer ist im Hinblick darauf, daß  $T \approx \sqrt{1 - \tau^2}$  werden soll, unbrauchbar. Der zweite jedoch ist unserem Vorhaben günstig. Es wird in  $\tau$  gerade Lösungen geben von der Gestalt

$$T = \sqrt{1 - \tau^2} Q(1 - \tau^2),$$

wo  $Q(u)$  eine im Intervall  $0 \leq u < 1$  konvergente Potenzreihe darstellt. Um sie zu bekommen, führen wir zweckmäßig vorher die Transformation

$$u = 1 - \tau^2$$

aus. Dann bekommt (22b) die Gestalt

$$\begin{aligned} 4u(1-u) \frac{d^2 T}{du^2} - 2(3u-1) \frac{dT}{du} \\ + (\lambda - x^2 + x^2 u) T = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Der Ansatz

$$T(u) = \sum_0^{\infty} c_{\nu} u^{\nu+1/2}$$

\* Frank-v. Mises<sup>2</sup>, Kap. VI, § 4, 3 von L. Bieberbach.

liefert für die  $c_\nu$  die Rekursionsformel

$$2(\mu+1)(2\mu+3)c_{\mu+1} + [\gamma - 2\mu(2\mu+3)]c_\mu + \kappa^2 c_{\mu-1} = 0,$$

mit  $\gamma = \lambda - 2 - \kappa^2$ .

Sie ergibt für die ersten Koeffizienten

$$c_1 = -\frac{\gamma}{6}c_0;$$

$$c_2 = -\frac{\gamma-10}{20}c_1 - \frac{\kappa^2}{20}c_0;$$

$$c_3 = -\frac{\gamma-28}{42}c_2 - \frac{\kappa^2}{42}c_1.$$

Entsprechend unserem Vorhaben bestimmen wir  $\gamma$  so, daß

$$T \approx \sqrt{1-\tau^2} = \sqrt{u}$$

wird.

Eine gute Annäherung erreichen wir am bequemsten dadurch, daß wir möglichst viele Koeffizienten der niedrigsten Potenzen von  $u$  zum Verschwinden bringen. In unserem Fall erreichen wir das Verschwinden von  $c_1$ , indem wir  $\gamma = 0$  setzen.

Das bedeutet

$$\lambda = 2 + \kappa^2; \quad c_0 = 1; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = -\frac{\kappa^2}{20};$$

$$c_3 = \frac{(\kappa^2 - 26)\kappa^2}{42 \cdot 20} \approx -\frac{13\kappa^2}{420}.$$

Wir können die so gefundene Näherungslösung

$$T = \sqrt{u} \left[ 1 - \frac{\kappa^2}{20}u + \frac{(\kappa^2 - 26)\kappa^2}{840}u^2 \right] \quad (35)$$

für kleine  $\kappa$  als eine gute Annäherung an die exakte erkennen. Sie gibt für  $2\kappa = k' < 0,1$  eine praktisch ausreichende Erfüllung der Randbedingung für  $T$  auf der Platte.

Nun können wir vorsatzgemäß an die Erfüllung der Randbedingungen für  $S$  gehen. Zuzufolge (33) bedeutet

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \sqrt{(\sigma^2 - 1)} S'(\sigma) = RV$$

[s. Gl. (23)!] für das Absolutglied  $a_0$  von  $P_1(z)$  in (32)

$$a_0 = RV\sqrt{2}e^{i\kappa},$$

wodurch  $P_1(z)$  aus (31) vollkommen bestimmt ist, wenn man  $\lambda = 2 + \kappa^2$  setzt. Das Absolutglied

von  $P_2(z)$  ist so zu berechnen, daß sich für das Verhalten im Unendlichen ergibt

$$\sqrt{z}P_1(z) + P_2(z) \approx \frac{\text{const}}{\sigma} \left( 1 + \frac{1}{i\kappa\sigma} + \frac{1}{4\sigma^2} \dots \right),$$

wobei  $z = 1 - 1/\sigma$ .

Einen einfachen Weg hierzu gibt uns die Helmholtzsche Erweiterung des Greenschen Satzes<sup>9</sup>. Es gilt für irgendeine Lösung  $\psi$  der Schwingungsgleichung  $\Delta\psi + k'^2\psi = 0$ , die sich im Unendlichen wie  $e^{-ik'\varrho'}/\varrho'$  verhält, und welche auf irgendwelchen geschlossenen Randflächen im Endlichen als bekannt angenommene Werte und Normalableitungen hat, in jedem Aufpunkt  $P$  im Innern des Funktionsbereiches

$$4\pi\psi(P) = - \int_F \left[ \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik'\varrho'}}{\varrho'} \right) - \frac{e^{-ik'\varrho'}}{\varrho'} \frac{\partial\psi}{\partial n} \right] dF,$$

wobei  $\varrho'$  den Betrag des Fahrstrahls von  $P$  nach dem betreffenden Flächenelement  $dF$  und  $n$  die nach dem Gebietsäußeren weisende Normalenrichtung bedeutet.

In unserem Falle wählen wir als Fläche eine solche, welche die Kreisscheibe umschließt. Ziehen wir diese stetig auf die beiden Seiten der Kreisscheibe zusammen, so gilt im Grenzfall auf der linken Seite

$$n = x; \quad \psi = \psi_{-0}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 2RV$$

und für die rechte Seite

$$n = -x; \quad \psi = \psi_{+0}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = -2RV.$$

So bekommen wir durch Zusammenfassen der beiden Flächenintegrale

$$4\pi\psi(P) = - \int \left[ \psi_{-0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ik'\varrho'}}{\varrho'} \right) - \frac{e^{-ik'\varrho'}}{\varrho'} 2RV \right] dF$$

$$- \int \left[ -\psi_{+0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ik'\varrho'}}{\varrho'} \right) + \frac{e^{-ik'\varrho'}}{\varrho'} 2RV \right] dF$$

$$= \int (\psi_{+0} - \psi_{-0}) \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-ik'\varrho'}}{\varrho'} dF$$

$$= 2 \int \psi_{+0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ik'\varrho'}}{\varrho'} \right) dF.$$

<sup>9</sup> Frank-v. Mises<sup>2</sup>, Kap. XIX, § 1, 4 von E. Rothe. — H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, § 290.



$$4\pi\psi(P) = 2 \int \psi_{+0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ik'q'}}{q'} \right) dF.$$

Bezeichnen wir die  $x$ -Koordinate von  $P$  mit  $\xi'$ , so gilt wie üblich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ik'q'}}{q'} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi'} \left( \frac{e^{-ik'q'}}{q'} \right)$$

und wir bekommen

$$4\pi\psi(P) = -2 \frac{\partial}{\partial \xi'} \int \psi_{+0} \frac{e^{-ik'q'}}{q'} dF, \quad (36)$$

wobei das Integral über die rechte Seite der Kreisfläche mit dem Radius  $1/2$  (dimensionslos gemessen) zu erstrecken ist.

Nun setzen wir gemäß unserer oben gefundenen Näherungslösung (35) für  $T$

$$\psi_{+0} = \alpha T(u),$$

wobei  $\alpha$  unser gesuchtes  $\alpha = S(\sigma=1) = e^{-i\pi/2} \cdot P_2(0) = e^{-i\pi/2} b_0$  bedeutet [s. (32)!]. Es gilt dann z. B. überall auf der  $x$ -Achse nach (36)

$$\psi = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi'} \int T \frac{e^{-ik'q'}}{q'} dF. \quad (36a)$$

$\alpha$  kann nun leicht mit Hilfe der Forderung

$\lim_{\xi' \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial \xi'} = 2RV$  bestimmt werden, welche erfüllt

sein muß, wenn sich der Aufpunkt  $P$  auf der  $x$ -Achse von rechts her dem Mittelpunkt der Platte nähert (Abb. 4).

Das ergibt die Gleichung

$$-\frac{\alpha}{2\pi} \lim_{\xi' \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \int T \frac{e^{-ik'q'}}{q'} dF = 2RV.$$

Bezeichnet  $r'$  den (dimensionslos gemessenen) Abstand des Flächenelementes  $dF$  der Kreisscheibe von ihrem Mittelpunkt, so gilt für das zu-

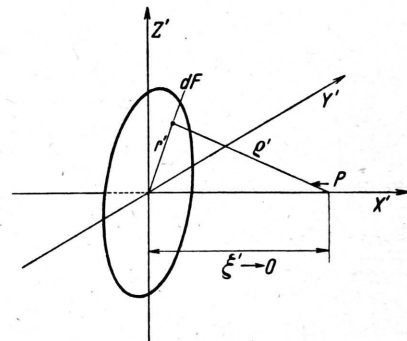


Abb. 4. Annäherung des Aufpunktes an den Plattenmittelpunkt.

gehörige  $\tau = 2r'$ . Der Radius des Scheibenrandes ist  $1/2$ , und für das Flächenelement können wir wegen der axialen Symmetrie setzen  $dF = 2\pi r' dr'$ . Damit wird unsere Bestimmungsgleichung für  $\alpha$

$$-\alpha \lim_{\xi' \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \int_0^{1/2} 2r' T \frac{e^{-ik'q'}}{q'} dr' = 4RV, \quad (37)$$

mit  $q' = \sqrt{\xi'^2 + r'^2}$ ,  
und nach (35)

$$T = \sqrt{1-4r'^2} \left[ 1 - \frac{\kappa^2}{20} (1-4r'^2)^2 + \frac{(\kappa^2-26)\kappa^2}{840} (1-4r'^2)^3 \right].$$

Nun darf bei kleinen  $k'$  gesetzt werden<sup>10</sup>

$$\frac{e^{-ik'q'}}{q'} = \frac{1}{q'} [\cos k'q' - i \sin k'q'] = \left[ \frac{1}{q'} - \frac{k'^2 q'}{2!} + \frac{k'^4 q'^3}{4!} - \dots \right] - i \left[ \frac{k'}{1!} - \frac{k'^3 q'^2}{3!} + \frac{k'^5 q'^4}{5!} - \dots \right].$$

Dann wird aus (37), wenn wir die Ausdrücke für  $T$  und  $e^{-ik'q'}/q'$  unter Berücksichtigung von  $k' = 2\kappa$  einführen und Glieder mit höheren Potenzen von  $\kappa$  vernachlässigen:

$$\begin{aligned} & -\alpha \lim_{\xi' \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \left\{ \int_0^{1/2} \left[ \frac{2r' \sqrt{1-4r'^2}}{\sqrt{\xi'^2 + r'^2}} - \kappa^2 \left( 4r' \sqrt{\xi'^2 + r'^2} \sqrt{1-4r'^2} + \frac{13r' \sqrt{(1-4r'^2)^7}}{210 \sqrt{\xi'^2 + r'^2}} + \frac{r' \sqrt{(1-4r'^2)^5}}{10 \sqrt{\xi'^2 + r'^2}} \right) \right] dr' \right. \\ & \left. - i \int_0^{1/2} \left[ \kappa 4r' \sqrt{1-4r'^2} - \frac{8}{3} \kappa^3 r' \sqrt{1-4r'^2} (\xi'^2 + r'^2) - \frac{1}{5} \kappa^5 \sqrt{(1-4r'^2)^5} r' \dots \right] dr' \right\} = 4RV. \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Mit Hilfe desselben Verfahrens zeigt Lord Rayleigh im § 311 seiner „Theorie des Schalles“ die dissipative Wirkung der Strahlung.

Vernachlässigen wir im Realteil das relativ unerhebliche Glied mit  $\kappa^2$  (welches nur eine unwesentliche Korrektur der mitschwingenden Mediummasse bringen würde) und lassen im Imaginärteil das erste und dritte Glied weg, weil sie infolge ihrer Unabhängigkeit von  $\xi'$  keinen Beitrag bei der Differentiation nach  $\xi'$  liefern werden, so kommt

$$-a \lim_{\xi' \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2 r' \sqrt{1-4 r'^2}}{\sqrt{\xi'^2 + r'^2}} dr' + i \frac{8 \kappa^3}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} r' \sqrt{1-4 r'^2} (\xi'^2 + r'^2) dr' \right\} = 4 R V. \quad (38)$$

Elementare Integrationen und Differentiationen liefern

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2 r' \sqrt{\frac{1-4 r'^2}{\xi'^2 + r'^2}} dr' = \frac{1}{2} (1 + 4 \xi'^2) \left( \arctg \frac{1}{2 \xi'} - \frac{2 \xi'}{1 + 4 \xi'^2} \right);$$

$$\lim_{\xi' \rightarrow 0} \frac{d^2}{d \xi'^2} \int_0^{\frac{1}{2}} 2 r' \sqrt{\frac{1-4 r'^2}{\xi'^2 + r'^2}} dr' = \lim_{\xi' \rightarrow 0} 4 \left[ \arctg \frac{1}{2 \xi'} - \frac{2 \xi'}{1 + 4 \xi'^2} \right] = 2 \pi;$$

ferner 
$$\lim_{\xi' \rightarrow 0} \frac{d^2}{d \xi'^2} \int_0^{\frac{1}{2}} r' \sqrt{1-4 r'^2} (\xi'^2 + r'^2) dr' = \lim_{\xi' \rightarrow 0} \int_0^{\frac{1}{2}} 2 r' \sqrt{1-4 r'^2} dr' = + \frac{1}{6}.$$

Damit errechnet sich aus (38)

$$a = - \frac{2 R V}{\pi + \frac{2}{9} \kappa^3 i},$$

womit wir als erste Näherung für die Randwerte des Geschwindigkeitspotentials auf der Kreisscheibe bekommen

$$\Phi_{+0} = a T e^{i \omega t} = - \frac{2 R V}{\pi + \frac{2}{9} \kappa^3 i} \sqrt{1 - (2 r')^2} \left[ 1 - \frac{\kappa^2}{20} (1 - 4 r'^2)^2 - \frac{13}{420} \kappa^2 (1 - 4 r'^2)^3 \dots \right],$$

woraus bei sinngemäßem Vernachlässigen der höheren Potenzen von  $\kappa$  in Real- und Imaginärteil

$$\Phi_{+0} = - \frac{2 R V}{\pi} \sqrt{1 + 4 r'^2} \left[ 1 - \frac{2 \kappa^3}{9 \pi} i \right] e^{i \omega t} = - \frac{2 R V}{\pi} \sqrt{1 - 4 r'^2} e^{i(\omega t - 2 \kappa^3 / 9 \pi)}$$

wird:

Der Vergleich mit (25) lehrt, daß bei kleinen  $\kappa$  die Berücksichtigung der Kompressibilität des Mediums zu keiner wesentlichen Änderung des Absolutbetrages im Potential (und damit in den Drucken) in der Nähe der Platte führt. Wir bemerken auch, daß die Korrektionsglieder in (35) für die erste Näherung noch keinen Beitrag geleistet haben. Es entsteht aber jetzt eine kleine Phasenverschiebung von etwa  $-2 \kappa^3 / 9 \pi$  gegenüber dem Fall der Inkompressibilität, der zu einem Strahlungsverlust an das Medium Anlaß

gibt. Um ihn zu ermitteln, berechnen wir zuerst die resultierende Mediumkraft auf die Platte. Der Druck ist

$$\begin{aligned} p_{+0} &= -p_{-0} = -q_0 \frac{\partial \Phi_{+0}}{\partial t} \\ &= +i q_0 \frac{2 R V}{\pi} \omega \sqrt{1 - 4 r'^2} e^{i(\omega t - 2 \kappa^3 / 9 \pi)}. \end{aligned}$$

Durch Integration über die Kreisfläche erhalten

wir als resultierende Kraft

$$\begin{aligned}
 P &= - \int 2 p_{+0} dF = - i \frac{4 R V \omega Q_0}{\pi} e^{i(\omega t - 2\kappa^3/9\pi)} \\
 &\quad \cdot \int_0^R 2 r \pi \sqrt{1 - r^2/R^2} dr \\
 &= - i 8 Q_0 \omega V e^{i(\omega t - 2\kappa^3/9\pi)} \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr \\
 &= - i 8 Q_0 \omega V e^{i(\omega t - 2\kappa^3/9\pi)} R^3/3 \\
 &= - i \frac{8 R^3 Q_0}{3} \omega V e^{i(\omega t - 2\kappa^3/9\pi)}.
 \end{aligned}$$

Ist  $V$  reell, so wird die von der Platte geleistete mechanische Arbeit

$$\begin{aligned}
 A &= - \int_0^t \operatorname{Re}(P) \operatorname{Re}(V e^{i\omega t}) dt \\
 &= - \frac{8 R^3 Q_0}{3} \omega V^2 \int_0^t \sin(\omega t - 2\kappa^3/9\pi) \cos \omega t dt \\
 &= - \frac{4 R^3 Q_0}{3} \omega V^2 \int_0^t [\sin(2\omega t - 2\kappa^3/9\pi) \\
 &\quad + \sin(-2\kappa^3/9\pi)] dt.
 \end{aligned}$$

Das erste Glied des letzten Integrals ergibt als Zeitmittel der geleisteten Arbeit Null, das zweite dagegen zeigt als Zeitmittel der abgestrahlten Leistung, indem wir entsprechend unserer Näherung den Sinus wieder durch sein Argument ersetzen,

$$W = \frac{4 R^3 Q_0}{3} \omega \frac{2 \kappa^3}{9 \pi} V^2 = \frac{8 R^6 Q_0 \omega^4 V^2}{27 \pi c^3}.$$

Dabei ist  $\kappa = k'/2$  gemäß (9) durch  $R\omega/c$  ersetzt worden.

Das berechnete  $\alpha$  liefert, in (36a) eingesetzt, eine Integraldarstellung von  $\psi$  im Medium, welche für großes  $q'$  besonders einfach wird und auch für Punkte auf der  $x$ -Achse. In der Nähe der Platte wird man sonst zur Berechnung des Schallfeldes zweckmäßig auf die unter (32) eingeführten Potenzreihen  $P_1(z)$  und  $P_2(z)$  mit den jetzt bestimmten Absolutgliedern  $a_0 = RV\sqrt{2}e^{i\kappa}$  und

$$b_0 = e^{i\kappa\alpha} = - \frac{2 R V e^{i\kappa}}{\pi + \frac{2 \kappa^3}{9} i} \text{ sowie } \lambda = 2 + \kappa^2 \text{ zurück-}$$

greifen. Jedoch würden diese Entwicklungen über das Ziel der vorliegenden Arbeit hinausgehen und übrigens kaum merkliche Abweichungen von (25) ergeben.

## Zur Statistik klassischer Gesamtheiten<sup>1</sup>

Von ARNULF SCHLÜTER\*

(Z. Naturforschg. 3a, 350—360 [1948]; eingegangen am 8. Dezember 1947)

Es wird zunächst das Phasenvolumen einer Gesamtheit als das von der Energiefläche im Phasenraum eingeschlossene Volumen und die Phasendichte als dessen Ableitung nach der Energie definiert. Auf Grund der Ergodenhypothese kann dann die Phasendichte der Gesamtheit als das Faltungsprodukt der Phasendichten der Einzelteilchen gewonnen werden, und diese können wieder, wenn die Energie der Teilchen separierbar ist, als Faltungsprodukte der den Energieanteilen zuzuordnenden „Phasendichten“ dargestellt werden.

Für bestimmte, besonders wichtige Teilchensorten lassen sich diese Faltungen explizit durchführen. Für diese werden einige Verteilungsprobleme durchgerechnet; insbesondere wird die exakte Gültigkeit des Äquipartitionstheorems nachgewiesen. Daraus und aus der isotropen Invarianz des Phasenvolumens folgt, daß die thermodynamischen Differentialgleichungen streng erfüllt werden, wenn die Entropie proportional dem Phasenvolumen und die Temperatur proportional zu dessen logarithmischer Ableitung gesetzt werden. Das gilt auch für Gesamtheiten aus beliebig wenigen Teilchen.

### Der Phasenraum

Es sei ein System betrachtet, das den Gesetzen der klassischen Mechanik genügt; dabei stellen wir uns vor, daß dieses System aus vielen einzel-

\* Bonn, jetzt Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen.

nen Teilchen besteht, ohne jedoch vorläufig von dieser Vorstellung Gebrauch zu machen. Der Zustand („Mikrozustand“) des Systems wird dann in jedem Augenblick durch die Angabe von so

<sup>1</sup> Die vorliegende Untersuchung stellt den ersten Teil der Bonner Diss. des Verf. dar.